

Théorème de Pythagore

Fiche relue en 2016

Cours de mathématique au programme de quatrième



Prérequis : Dans ce chapitre, tu vas avoir besoin de savoir calculer le carré d'un nombre, résoudre une équation et utiliser la touche racine carrée de la calculatrice.

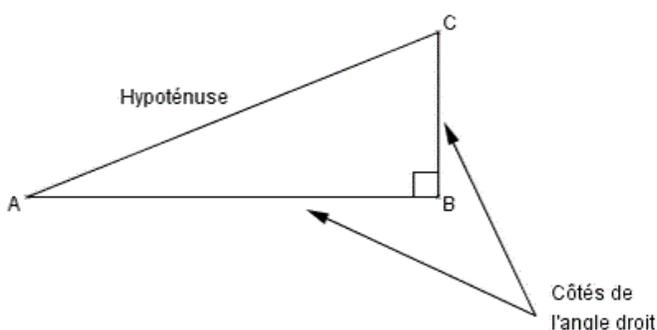
Enjeu : Ce chapitre est un des premiers où tu es confronté aux démonstrations. Il va falloir être très précis dans ta rédaction en justifiant correctement les différentes étapes. Ce chapitre contient en fait deux volets : tu vas apprendre à déterminer une longueur manquante dans un triangle rectangle quand deux sont déjà connues et à déterminer, à l'aide des longueurs des côtés, si un triangle est ou n'est pas rectangle.

1. Le théorème de Pythagore

Un théorème n'est en fait qu'une propriété un peu plus importante que les autres.

Ce théorème va nous permettre, quand on connaît la longueur de deux côtés d'un triangle rectangle, de déterminer la longueur du troisième. Elle ne s'applique qu'aux triangles rectangles. Il est donc important de vérifier, avant de l'appliquer, qu'on possède bien un triangle rectangle (soit l'énoncé l'indique, soit une des questions de l'exercice nous a demandé de le montrer).

Dans le cas d'un triangle rectangle, et uniquement dans ce cas, le plus grand côté (qui fait donc face à l'angle droit) s'appelle l'**hypoténuse**.



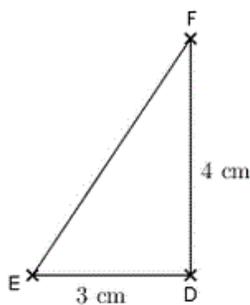
Théorème

Si ABC est un triangle rectangle en B alors on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

On peut également dire que le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Exemple 1 : (On cherche la longueur de l'hypoténuse) On considère un triangle DEF rectangle en D tel que DE=3cm et DF=4cm. On veut déterminer la longueur de [EF].



Dans le triangle DEF rectangle en D on applique le théorème de Pythagore.

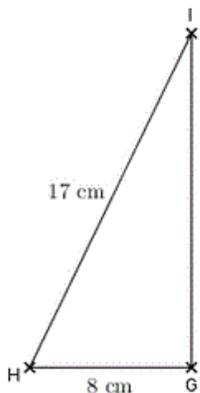
On a donc $EF^2 = DE^2 + DF^2$. On remplace les longueurs connues par leurs valeurs.

On obtient ainsi $EF^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. On utilise la touche $\sqrt{\quad}$ (racine carrée) de la calculatrice pour obtenir $EF=5$ cm.



Il est interdit d'utiliser le théorème de Pythagore sans avoir préalablement indiqué qu'on travaillait dans un triangle rectangle.

Exemple 2 : (On cherche la longueur d'un des côtés de l'angle droit) On considère un triangle GHI rectangle en G tel que GH=8 cm et HI=17 cm. On veut déterminer la longueur de [GI].



Dans le triangle GHI rectangle en G on applique le théorème de Pythagore.

On a donc $HI^2 = GI^2 + GH^2$. On remplace les longueurs connues par leurs valeurs.

On obtient ainsi $17^2 = GI^2 + 8^2$ soit $289 = GI^2 + 64$. On est ramené à résoudre une équation. Pour cela on va retrancher 64 aux deux membres de l'équation, ce qui nous donne : $289 - 64 = GI^2$ et donc $GI^2 = 225$ et par conséquent, en utilisant la racine carrée, $GI = 15$ cm.



Il est important d'écrire dans un premier temps l'égalité du théorème avec le nom des sommets et ensuite de remplacer les longueurs par leurs valeurs.

La propriété suivante va nous permettre de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle à l'aide des longueurs des côtés du triangle.

Conséquence

Si dans un triangle ABC dont le plus grand côté est [BC] on constate que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Dans certains livres, cette conséquence est appelée « **contraposée** » du théorème de Pythagore.

Voyons comment l'utiliser :

Dans un triangle ABC on sait que $AB=7$ cm, $AC=11$ cm et $BC=13$ cm.

Dans ce triangle, le plus grand côté est [BC].

D'une part $BC^2 = 169$

D'autre part $AB^2 + AC^2 = 7^2 + 11^2 = 49 + 121 = 170$

Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.

D'après la conséquence du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

2. Réciproque du théorème de Pythagore

Le mot réciproque signifie qu'on va partir de la conclusion du théorème, l'égalité donc ici, et qu'on va essayer de retrouver l'hypothèse d'application à savoir le fait que le triangle est rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle ABC on constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle en A.

Exemple : On considère le triangle ABC tel que $AB=5$ cm, $BC=12$ cm et $AC=13$ cm.

Dans ce triangle, le plus grand côté est [AC].

D'une part, $AC^2 = 13^2 = 169$

D'autre part $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Remarque : Bien que le programme officiel indique que, dans ce genre d'exercice, il ne soit pas demandé d'écrire « réciproque du théorème de Pythagore » mais simplement « théorème de Pythagore », il n'est pas rare de le voir apparaître dans la rédaction des corrections.

La rédaction de la réciproque et celle de la conséquence du théorème de Pythagore sont très proches ; seule la dernière partie diffère. Il est donc important de bien faire attention à la propriété qu'on applique en fonction des calculs effectués.

Fiche interactive Théorème de Pythagore