La proportionnalité

Cours 4ème

1. Quatrième proportionnelle

Dans une **situation de proportionnalité**, en connaissant deux valeurs d'une grandeur A et une valeur d'une grandeur B, on peut calculer la deuxième valeur de B à l'aide du **produit en croix**.

Soit le tableau de proportionnalité suivant :

Grandeur A	a_1	a_2
Grandeur B	b_1	b_2

Le produit en croix donne l'égalité : $a_1 b_2 = a_2 b_1$

En effet $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$ sont deux quotients égaux entre eux, égaux au coefficient de proportionnalité. En multipliant par b_1 et b_2 l'égalité $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ on obtient l'égalité du produit en croix $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Exemple :
Le tableau suivant donne la consommation d'essence d'une voiture en fonction de la distance parcourue à 90 km/h. On cherche la quatrième proportionnelle.

Distance (km)	100	60
Consommation (L)	4,5	c

Le produit en croix donne : $100c = 60\times$ 4,5 $= 270$

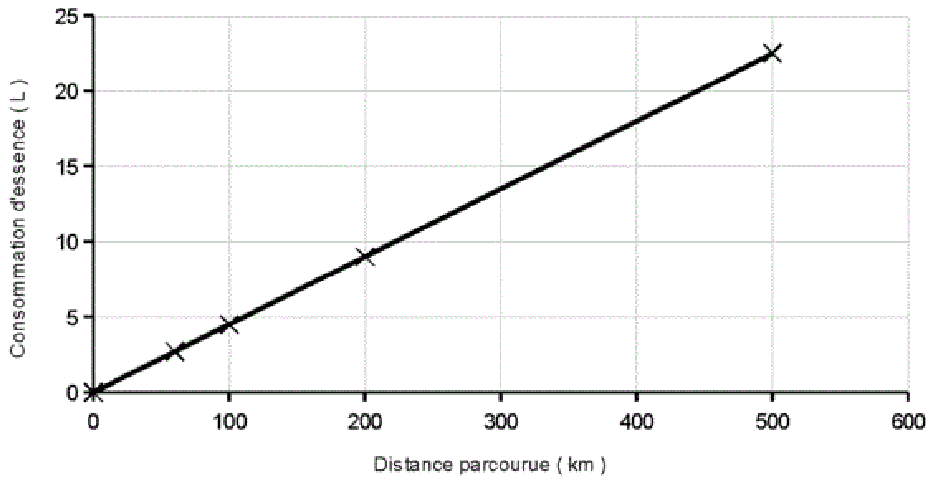
$Donc c = 270 \frac{}{100=2,7}$

Une voiture qui consomme 4,5 L d'essence sur 100 km en consomme 2,7 sur 60 km.

2. Propriété de la représentation graphique de grandeurs proportionnelles

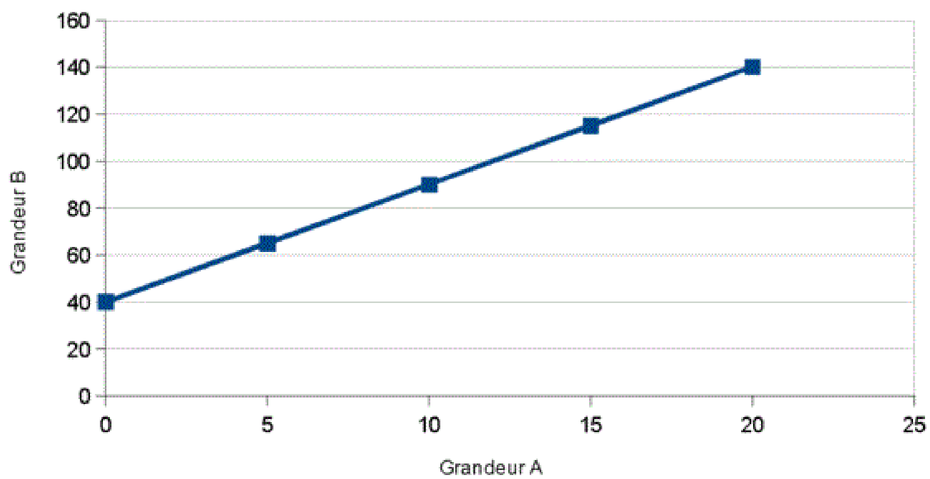
Si **deux grandeurs** A et B sont **proportionnelles**, les points dont l'abscisse est une valeur de A et l'ordonnée la valeur de B correspondante, appartiennent à une **droite qui passe par l'origine** du repère.

Exemple : la représentation graphique de la consommation d'essence en fonction de la distance parcourue est une droite passant par l'origine.

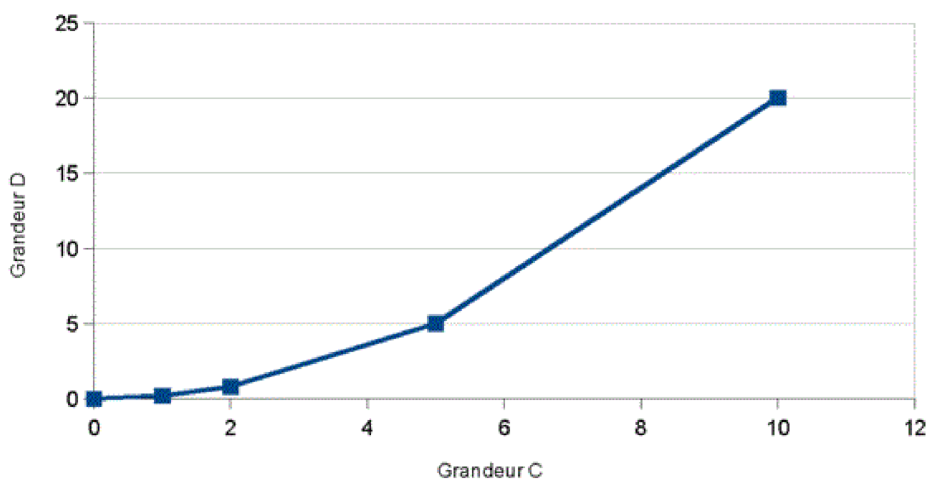


> **Inversement**, deux grandeurs dont la représentation graphique est une droite passant par l'origine sont proportionnelles, sinon elles ne le sont pas.

Exemples :



La représentation graphique de B en fonction de A est une droite mais elle ne passe pas par l'origine : A et B **ne sont pas** proportionnelles.



La représentation graphique de D en fonction de C passe par l'origine, mais ce n'est pas une droite : C et D ne sont pas proportionnelles.

3. Pourcentages

Un pourcentage désigne une proportion rapportée à une quantité de 100.
Soit p est un nombre.
p % d'une quantité, c'est cette quantité multipliée par $\frac{p}{100}$

Le pourcentage est utile pour se faire une idée de la proportion, car on connaît bien la répartition des nombres de 0 à 100.

a) Calculer le pourcentage à partir de la quantité

On applique les méthodes de calcul de proportionnalité pour obtenir 100.

Exemple : Dans une ville de 1200 habitants, il y a 606 femmes.
Le pourcentage de femmes est $\frac{606}{1200} \times 100 = 50,5$. Il y a 50,5 % de femmes.

b) Calculer une quantité à partir d'un pourcentage

Un pourcentage est un coefficient de proportionnalité. Il faut le multiplier par la quantité totale, **sans oublier de diviser par 100**.

Exemple :
Un fromage contient 25 % de matières grasses, René en mange 40 grammes.

René a mangé $40 \times \frac{25}{100} = 10$ grammes de matières grasses.

4. Echelles

Un **plan** ou une **carte** est **à l'échelle** si les longueurs représentées sont **proportionnelles** aux longueurs réelles.
L'échelle est le **coefficient de proportionnalité** par lequel il faut multiplier les longueurs réelles pour obtenir la longueur sur le plan.

échelle = $\frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$ (longueurs exprimées dans la même unité)

On exprime souvent l'échelle sous la forme d'une fraction.

Exemples : sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50000}$, 1 cm représente 50 000 cm, soit 500 m.

Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{200}$ une longueur de 6 m sera représentée par une longueur de $6 \times \frac{1}{200}m = 3cm$.

5. Pourcentages dans une réunion de deux groupes

Voyons un exemple concret : dans un collège fréquenté par 240 filles et 210 garçons, 20 % des filles et 10 % des garçons aimeraient devenir médecins. Quel pourcentage d'élèves souhaite devenir médecin ?
Les pourcentages de la réunion des filles et garçons **ne s'additionnent pas**, la réponse n'est pas 30 %. **Ce n'est pas non plus la moyenne** des deux, la réponse n'est pas 15 %.

Pour résoudre le problème, il faut **calculer les effectifs dans chaque groupe**.

Groupe des filles : $240 \times \frac{20}{100} = 48$ filles veulent devenir médecins.

Groupe des garçons : $210 \times \frac{10}{100} = 21$ garçons veulent devenir médecins.

Dans le collège, $48 + 21 = 69$ élèves veulent devenir médecins.
Il y a en tout $240 + 210 = 450$ élèves.

Le pourcentage sur l'ensemble des élèves est donc $\frac{69}{450} \times 100 = 15,33\%$ (à 0,01 % près).

15,33 % des élèves du collège souhaitent devenir médecins.