Equations

Fiche relue en 2016.

Cours sur les nombres et calculs

1 - Équations

Une **équation** est une égalité de deux expressions littérales.

Exemple :
$2x - 3 = 5$ est une équation.

Les **membres** de l'équation sont les expressions littérales avant et après le signe égal (=)

Exemple :
Dans l'exemple précédent, le premier membre est $2x - 3$ et le second membre est 5.

Une équation est à **une inconnue** si les expressions littérales ne contiennent qu'une lettre différente.

Exemple :
L'équation précédente a une inconnue notée x.
L'équation $2x - 3 = -7y + 2$ a deux inconnues x et y.

Un nombre est **solution** de l'équation à une inconnue si c'est une valeur de l'inconnue qui vérifie l'égalité.

Exemple : L'expression $2x - 3$ pour x = 1 est égale à 2 × 1 - 3 = - 1
1 n'est donc **pas** solution de $2x - 3 = 5$

L'expression $2x - 3$ pour x = 4 est égale à 2 × 4 - 3 = 8 - 3 = 5.
4 est une solution de $2x - 3 = 5$

Résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres qui sont solutions de l'équation.

Dans l'exemple $2x - 3 = 5$ la lettre x n'a pas de puissance.
On dit que l'équation est du **premier degré**.
L'équation $x^2 + x - 3 = 5$ a une puissance 2, elle est du second degré.
En **quatrième**, on ne s'intéressera qu'aux équations du **premier degré à une inconnue**.

2 - Propriétés permettant de résoudre une équation

Si on **ajoute** ou si on **soustrait** le **même nombre** ou la **même expression** aux **deux membres** d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions.
Avec a, b, c nombres relatifs :
Si a = b, alors a + c = b + c
Si a = b, alors a - c = b - c

Si on **multiplie** ou si on **divise** les deux membres d'une équation par **le même nombre** **non nul**, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions.
Avec a, b, c nombres relatifs et **c différent de 0** :
Si a = b, alors a c = b c
Si a = b, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Exemple :
On veut résoudre l'équation $4x + 3 = x - 9$

a) Retirons x aux deux membres de l'équation :
$4x + 3 - x = x - 9 - x$

On réduit les deux membres, on obtient la nouvelle équation :
$3x + 3 = -9$

b) Retirons 3 aux deux membres de l'équation :
$3x + 3 - 3 = -9 - 3$

c) Simplifions chaque membre
$3x = -12$

d) Divisons par 3 les deux membres de l'équation :

$\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3}$

$x = -4$

Conclusion : l'équation $4x + 3 = x - 9$ a pour solution $x = -4$

3 - Résolution de problème

Certains problèmes demandent de trouver un nombre qui vérifie les hypothèses de l'énoncé.
a) Si l'énoncé ne le précise pas, il faut introduire une lettre désignant le nombre inconnu et le préciser : « On appelle x le ... »

b) Traduire la ou les informations de l'énoncé en égalité mathématique pour obtenir l'équation.

c) Résoudre l'équation.

d) Écrire une phrase de conclusion (très important !)

Exemple :
Dans sa ferme, le Père Étienne a des vaches adultes, des taurillons et des jeunes génisses. Il a 2 fois plus de génisses que de taurillons, et 3 fois plus de vaches que de taurillons. En tout, il a 54 bêtes. Combien a-t-il de vaches, de taurillons et de génisses ?

a) On appelle x le nombre de taurillons (on aurait pu choisir le nombre de vaches ou de génisses).

b) « Il a 2 fois plus de génisses que de taurillons » donne que le nombre de génisses est $2x$

« 3 fois plus de vaches que de taurillons » donne que le nombre de vaches est $3x$
« En tout, il a 54 bêtes » donne l'équation

c) On résout $x + 2x + 3x = 54$
$6x = 54$

$\frac{6x}{6} = \frac{54}{6}$

$x = 9$

d) Conclusion : le Père Étienne a 9 taurillons, 18 génisses et 27 vaches adultes.