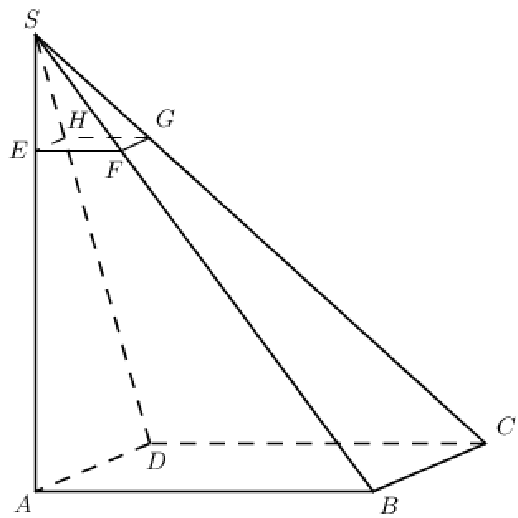
Sphère et géométrie dans l'espace

Exercice

Sur la figure ci-dessous, $SABCD$ est une pyramide à base carrée de hauteur SA telle que $AB = 9$ cm et $SA = 12$ cm.



Le triangle SAB est rectangle en A.

Partie A

$EFGH$ est la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèle à la base et telle que $SE = 3$ cm.

1.a Calculer EF.

b. Calculer SB.

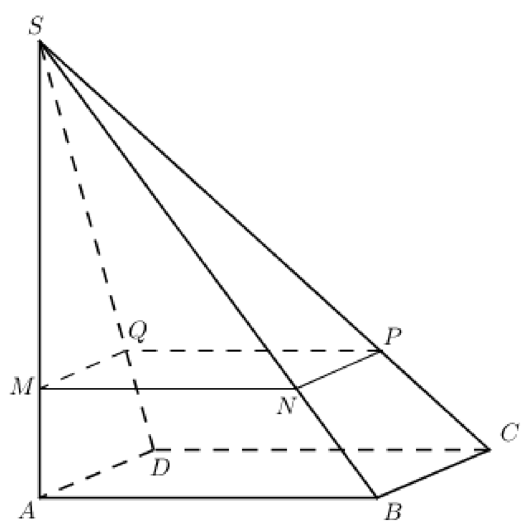
2.a Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

b. En déduire le volume de $SEFGH$. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

Partie B

Soit M un point de SA tel que $SM = x$ cm, où x est comprise entre 0 et 12.

On appelle $MNPQ$ la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèleà la base passant par M.



1. Montrer que $MN = 0,75x$.

2. Soit $A(x)$ l'aire du carré $MNPQ$ en fonction de x.
Montrer que $A(x) = 0,5625x^2$.
3. Pour quelle valeur de x l'aire $A(x)$ est-elle égale à l'aire d'unesphère de rayon $1,5$ cm.

Correction

Partie A

1.a. $EFGH$ est la section de la pyramide $SABCD$ par le plan parallèle à la base et telle que $SE = 3$ cm.
Par conséquent la pyramide $SEFGH$ est une réduction de la pyramide $SABCD$ de rapport $k = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.
Donc $EF = \dfrac{1}{4}AB = 2,25$ cm.
b. Dans le triangle SAB est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore on a $SB^2 = SA^2 + AB^2$.
Donc $SB^2 = 144 + 81 = 225$ et $SA = \sqrt{225} = 15$.

2.a. Le volume de $SABCD$ est $\mathscr{V} = \dfrac{AB^2 \times SA}{3} = 324$ cm$\hat{3}$.
b. Le volume de la pyramide $SEFGH$ est donc :
$\mathscr{V}' = \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 \mathscr{V} = \dfrac{81}{16} \approx 5$ cm$\hat{3}$.

Partie B

1. La pyramide $SMNPQ$ est une réduction de rapport $k = \dfrac{x}{12}$de la pyramide $SABCD$.
Par conséquent $MN = \dfrac{x}{12} \times AB = 0,75x$.

2. Ainsi $MNPQ$ est un carré et son aire est $A(x) = (0,75x)^2 = 0,5625x^2$.

3. L'aire de la sphère de rayon $1,5$ cm est $A' = 4\pi \times 1,5^2 = 9\pi$ cm$\hat{2}$.
On veut donc résoudre $0,5625x^2 = 9\pi$ soit $x^2 = \dfrac{9\pi}{0,5625} = 16\pi$.
Puisque $x \geqslant 0$ on a $x = 4\sqrt{\pi}$ cm.