Triangles

I. Construction de triangles

1. Inégalité triangulaire

Exercice :
1. Tracer un segment [AB] tel que AB = 8 cm. Tracer un cercle de centre A et de rayon 5 cm.
2. On veut construire un cercle de centre B qui coupe le cercle de centre A.
Comment doit-on choisir le rayon de ce deuxième cercle pour réaliser la figure ?

Solution :
Le rayon du cercle de centre B doit être supérieur à 3 cm et inférieur à 13 cm.
On appelle C l'un des deux points d'intersection des cercles. On constate que :
BC < AB + AC
AB < AC + BC
AC < AB + BC

Propriété (admise) : Inégalité triangulaire
Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Propriétés :
Si le point A appartient au segment [BC], **alors** BC = AB + AC.
Si BC = AB + AC, **alors** le point A appartient au segment [BC].

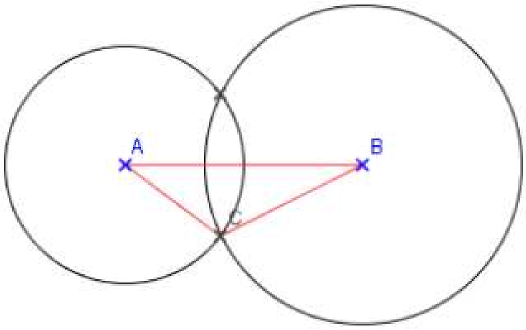
Conséquence :
On peut construire un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés si la longueur la plus grande est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemples :
Peut-on construire les triangles suivants dont les côtés mesurent :
a) 2 cm ; 5 cm et 8 cm
Solution : 8 > 2 + 5, donc on ne peut pas construire le triangle.
b) 7 cm ; 3 cm et 9 cm.
Solution : 9 < 7 + 3, donc on peut construire le triangle.

2. Construction

a) Connaissant les longueurs des trois côtés

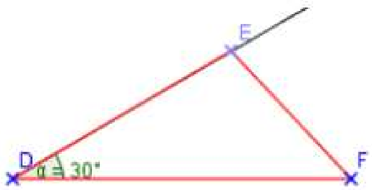
Exemple : Tracer un triangle ABC tel que AB = 6 cm, BC = 4 cm et AC = 3 cm.
- On trace le segment [AB] de longueur 6 cm.
- On trace le cercle de centre B et de rayon 4 cm.
- On trace le cercle de centre A et de rayon 3 cm.
- On appelle C l'un des deux points d'intersection des cercles.
- On trace les segments [BC] et [AC].



b) Connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle compris entre ces côtés

Exemple : Tracer un triangle DEF tel que $\widehat{\text{FDE}} = 30^{\circ}$, DE = 3 cm et DF = 4 cm.

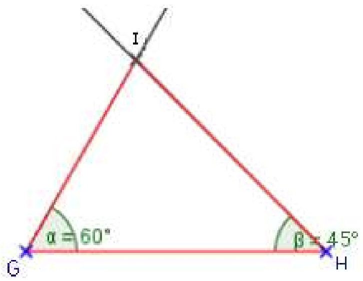
- On trace le segment [DF] de longueur 4 cm.
- On trace une demi-droite [Dx) telle que $\widehat{\text{FD}x} = 30^{\circ}$
- On place le point E à 3 cm du point D sur cette demi-droite.
- On trace le segment [EF].



c) Connaissant la longueur d'un côté et les mesures des deux angles adjacents à ce côté

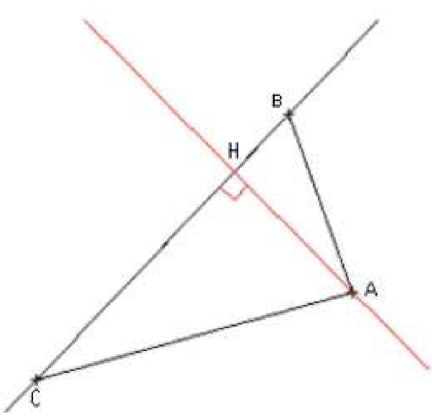
Exemple : Tracer un triangle GHI tel que GH = 4 cm, $\widehat{\text{HGI}} = 60^{\circ}$ et $\widehat{\text{GHI}} = 45^{\circ}$.

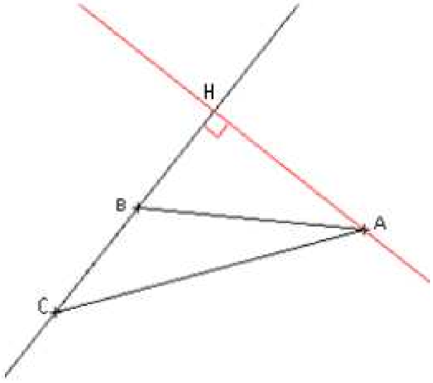
- On trace le segment [GH] de longueur 4 cm.
- On trace la demi-droite [Dx) telle que $\widehat{\text{HG}x} = 60^{\circ}$.
- On trace la demi-droite [Hy) telle que $\widehat{\text{GH}y} = 45^{\circ}$.
- On appelle I le point d ?intersection des deux demi-droites.
- On trace les segments [GI] et [HI].



II. Hauteur

Définition :
Une **hauteur** est une droite passant par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.





H est le pied de la hauteur issue de A. (AH) est la hauteur relative au côté [BC].

Propriété :
Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes.

Définition :
Le point de concours des trois hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre du triangle.

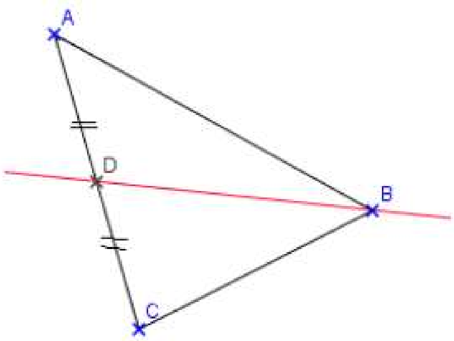
Sur l'animation ci-dessous, les trois hauteurs du triangle ABC ont été tracées. Déplacer les sommets A, B, C du triangle ABC. H est l'orthocentre du triangle ABC.

(L'animation n'est visible que sur le site directement)

Remarque :
L'orthocentre d'un triangle n'est pas nécessairement à l'intérieur de ce triangle

III. Médiane

Définition :
Dans un triangle, une **médiane** est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.



(DB) est la médiane du triangle ABC issue de B.

Propriété :
Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes.

Définition :
Le point de concours des trois médianes d'un triangle est appelé **centre de gravité** du triangle.

Sur la figure ci-dessous, les trois médianes du triangle ABC ont été tracées. Déplacer les sommets A, B, C du triangle ABC. G est le centre de gravité du triangle ABC.

(L'animation n'est visible que sur le site directement)

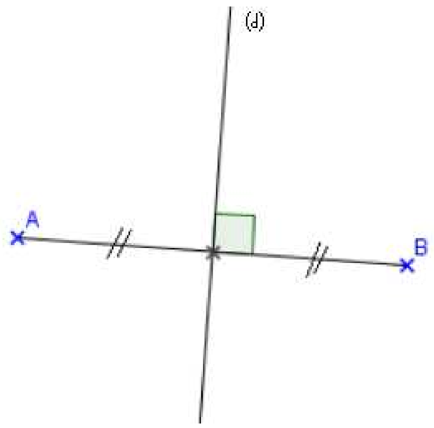
Remarques :
Le centre de gravité du triangle ABC est toujours à l'intérieur du triangle.
En bas à gauche apparaissent les aires des triangles AFC et AFB. On constate que ces deux aires sont toujours égales. La médiane (AF) partage le triangle ABC en deux triangles AFC et AFB de même aire.

Propriété :
Chaque médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

IV. Médiatrice

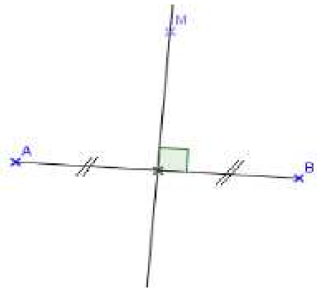
1. Médiatrice d'un segment (Rappels)

Définition :
La **médiatrice** d'un segment est la droite passant par le milieu du segment et qui est perpendiculaire à ce segment.



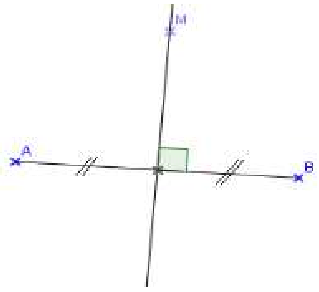
La droite (d) est la médiatrice du segment [AB].

Propriété :
Si un point appartient à la médiatrice d'un segment,**alors** il est à égale distance des extrémités de ce segment.



Donnée (ou **hypothèse**) :
M appartient à la médiatrice du segment [AB]
Conclusion :
MA = MB

Propriété :
Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment,**alors** il appartient à la médiatrice de ce segment.



Donnée (ou **hypothèse**) :
MA = MB
Conclusion :
M appartient à la médiatrice du segment [AB]

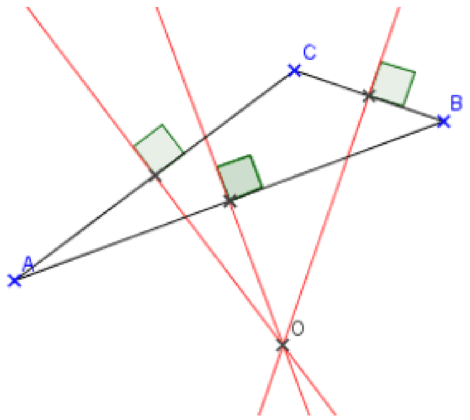
2. Médiatrices d'un triangle

Définition :
La **médiatrice** d'un côté d'un triangle est la droite perpendiculaire à ce côté et qui passe par son milieu.

Conjecture :

Exercice
1. Construire un triangle ABC.
Tracer la médiatrice (d_1) du côté [AB] et la médiatrice (d_2) du côté [AC].
On appelle O le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).
2. Tracer le cercle de centre O passant par A. Que constate-t-on ?
3. Construire la médiatrice du segment [BC]. Que constate-t-on ?

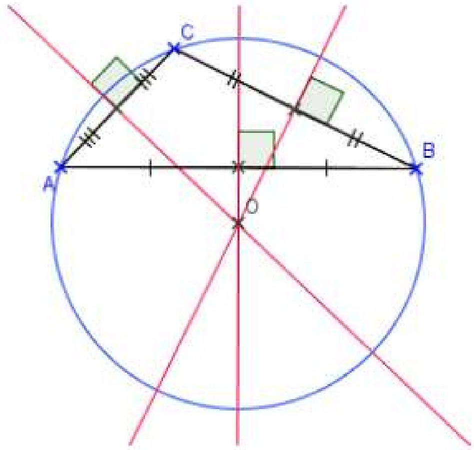
Réponse :
1.



2. On constate que le cercle de centre O passe par les points A, B et C.
3. On constate que la médiatrice du segment [BC] passe par le point O.

Propriété :
Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes. Le point commun à ces trois médiatrices est le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle.

Définition :
Ce cercle est appelé le **cercle circonscrit** au triangle.



Sur la figure ci-dessous, les trois médiatrices du triangle ABC ont été tracées. Déplacer les sommets A, B, C du triangle ABC. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(L'animation n'est visible que sur le site directement)

Remarque :
Le centre du cercle circonscrit n'est pas nécessairement à l'intérieur du triangle.

Démonstration :
Nous allons démontrer ces résultats :
On sait que (d_1) est la médiatrice du segment [AB] et que O est un point de la droite (d_1).
Or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment [propriété 1].
On en conclut que : **OA = OB**.

De même, on sait que (d_2) est la médiatrice de [AC] et O est un point de (d_2).
Or, d'après la propriété 1, en en conclut que **OA = OC**.

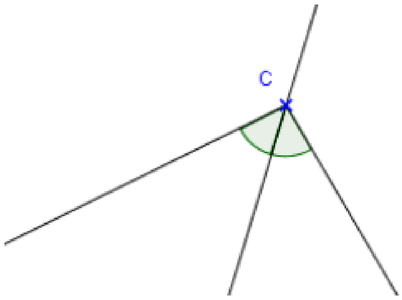
On a montré que : OA = OB et OA = OC.
On en conclut que : OB = OC.

Or, si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

On en conclut que le point O appartient à la médiatrice du segment [BC].
On a donc montré que le point O appartient aux trois médiatrices du triangle ABC.
De plus, on a montré que OA = OB = OC, donc O est le centre du cercle passant par les points A, B et C.

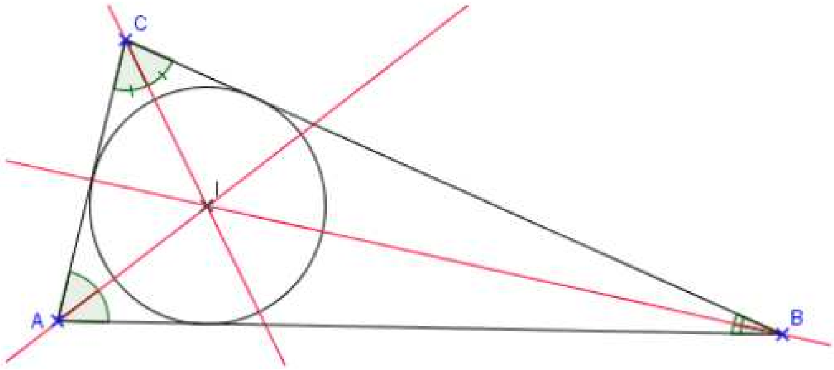
V. Bissectrice

Définition :
La bissectrice d'un angle est la droite qui passe par le sommet et qui partage l'angle en deux angles de même mesure.



Propriété :
Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Définition :
Le point de concours des trois bissectrices d'un triangle est appelé centre du cercle inscrit du triangle.



Sur l'animation ci-dessous, les trois bissectrices du triangle ABC ont été tracées. Déplacer les sommets A, B, C du triangle ABC. I est le centre du cercle inscrit du triangle ABC.

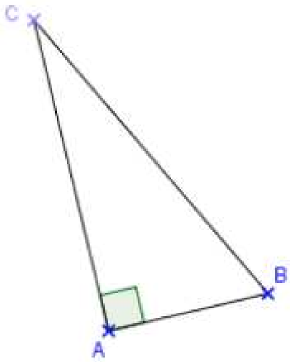
(L'animation n'est visible que sur le site directement)

Remarque :
Le centre du cercle inscrit est toujours à l'intérieur de ce triangle

VI. Triangles particuliers

1. Triangle rectangle

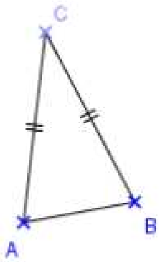
Définition :
Un **triangle rectangle** est un triangle qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse : c'est le plus grand des trois côtés du triangle.



Le triangle ABC est rectangle en A. L'hypoténuse est [BC].

2. Triangle isocèle

Définition :
Un **triangle isocèle** est un triangle qui a deux côtés égaux.

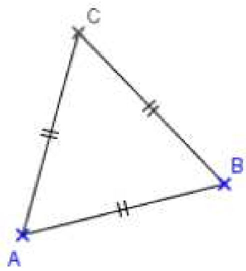


Le triangle ABC est isocèle en C. Le point C s'appelle le sommet principal. [AB] s'appelle la base.

Propriété :
Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont de même mesure.

3. Triangle équilatéral

Définition :
Un triangle équilatéral est un triangle qui a ses trois côtés égaux.

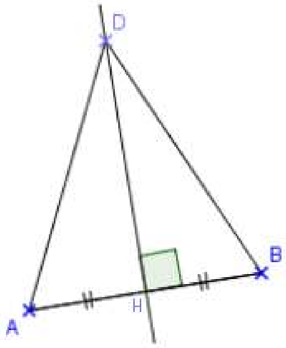


ABC est un triangle équilatéral.

Propriété :
Un triangle équilatéral a ses trois angles de même mesure.

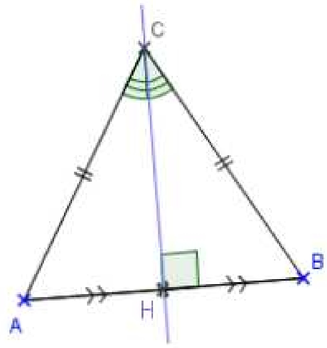
VII. Triangles particuliers et droites remarquables

Propriété :
Dans un triangle isocèle, la médiane, la hauteur, la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice de la base sont confondues.



Dans le triangle DAB isocèle en D, la droite (DH) est la hauteur issue de D, la bissectrice de $\widehat{D}$, la médiane issue de D et la médiatrice de [AB].

Propriété :
Dans un triangle équilatéral, les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices sont confondues.



Dans le triangle équilatéral ABC, (CH) est la hauteur issue de C, la bissectrice de $\widehat{C}$, la médiane issue de C et la médiatrice de [AB].