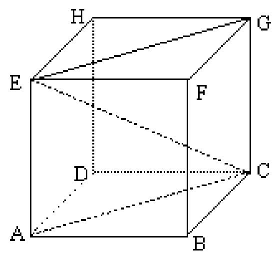
Géométrie

Exercice 1
La figure ci dessous est un cube ABCDEFGH d'arête 4 cm.

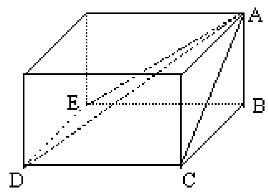


1. Indiquer sans justification la nature du quadrilatère AEGC.

2. Calculer EG.

3. Calculer la longueur de la diagonale [EC].

Exercice 2
Une pyramide ABCDE est inscrite dans un pavé droit dont la base BCDE est un carré de côté 4 cm et dont la hauteur mesure 3 cm.



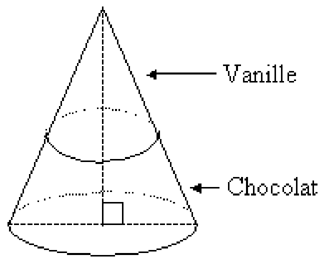
1. Calculer le volume de la pyramide.

2. Calculer AE.

3. Dessiner en vraie grandeur, dans le plan de la feuille, la face AED de la pyramide.

4. Calculer la valeur exacte de AD.

Exercice 3
On remplit un cône de 9 cm de hauteur et de 8 cm de diamètre de base avec de la glace.
- à la vanille pour les $\frac{2}{3}$ de la hauteur,
- au chocolat pour la partie restante.

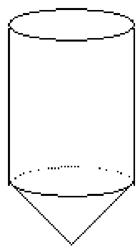


1. Calculer le volume de glace qu'il contient.

2. Calculer le volume de la glace à la vanille et celui de la glace au chocolat.
Par quelles fractions faut il multiplier le volume total de glace pour obtenir ces deux volumes ?
Les différents volumes seront arrondis au cm^3 près.

Exercice 4

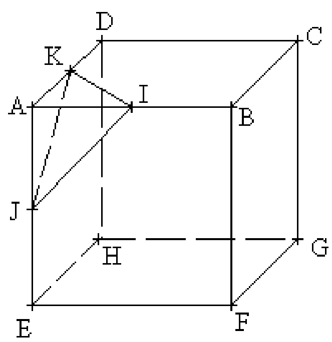
Un silo à céréales à la forme d'un cylindre de révolution accolé à un cône de révolution de même base.



Le disque de base a 10 m de diamètre et les hauteurs du cylindre et du cône sont respectivement 30 m et 10 m.
Quel est le volume exact du silo ?
Donner la valeur arrondie au m^3.

Exercice 5

ABCDEFGH est un cube d'arête AB = 12 cm.
I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AE], K est le milieu du segment [AD].

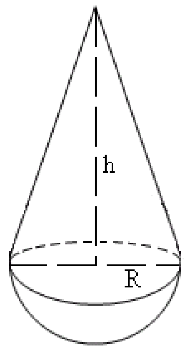


1. Quelle est l'aire du triangle AKI ?

2. Quel est le volume de la pyramide AIKJ de base AKI ?

3. Quelle fraction du volume du cube représente le volume de la pyramide AIKJ ?
Ecrire le résultat sous forme d'une fraction de numérateur 1.

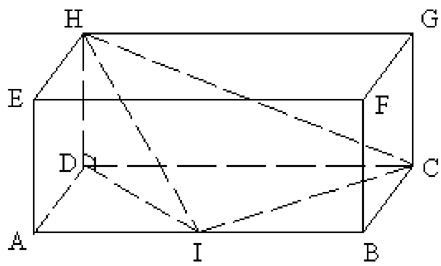
Exercice 6



Un jouet "Culbuto" est constitué d'une demi-boule de rayon 4 cm surmonté d'un cône de même rayon et de hauteur 9 cm.
Calculer le volume en cm^3 de ce jouet (arrondir le résultat au cm^3).

Exercice 7

L'unité de longueur est le centimètre.
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AD = DH = 4 et AB = 10. I est le milieu de [AB].



1. a) Réprésenter en vraie grandeur la face ABCD et placer le point I.
   b) Calculer DI. On donnera la valeur exacte.

2. a) Calculer l'aire du triangle DIC.
   b) Calculer la valeur exacte du volume de la pyramide HDIC.
En donner ensuite une valeur approchée entière à 1 cm^3 près.

Correction

Exercice 1

1. AEGC est un rectangle.

2. **Calculons EG :**
Dans le triangle EHG rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore :
$EG^2 = EH^2 + GH^2$
$EG^2 = 4^2 + 4^2$
$EG^2 = 16 + 16$
$EG^2 = 32$
Donc : $EG = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$
D'où : $EG = 4\sqrt{2}$ cm.

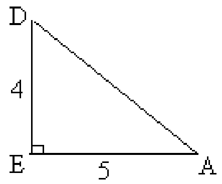
3. **Calculons EC :**
Dans le triangle EGC rectangle en G, on applique le théorème de Pythagore :
$EC^2 = EG^2 + GC^2$
$EC^2 = 32 + 16$
$EC^2 = 48$
Donc : $EC = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$
D'où : $EC = 4\sqrt{3}$ cm.

Exercice 2

1. **Calculons le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide :**
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire de la base.
Dans notre exercice, la base est le carré BCDE de côté 4 cm et la hauteur [AB] mesure 3 cm, on a donc :
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times DC^2 \times AB$
$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 3$
$\mathcal{V} = \frac{4^2 \times 3}{3}$
D'où : le volume de la pyramide ABCDE est de 16 cm^3.

2. **Calculons AE :**
Dans le triangle ABE rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :
$AE^2 = AB^2 + BE^2$
$AE^2 = 3^2 + 4^2$
$AE^2 = 9 + 16$
$AE^2 = 25$
Donc $AE = \sqrt{25}$
D'où : AE = 5 cm.

3. **Dessinons la face AED de la pyramide en vraie grandeur :**
AED est un triangle rectangle en E avec AE = 5 cm et ED = 4 cm.



4. **Calculons la valeur exacte de AD :**
Dans le triangle AED rectangle en E, on applique le théorème de Pythagore :
$AD^2 = AE^2 + ED^2$
$AD^2 = 5^2 + 4^2$
$AD^2 = 25 + 16$

$AD^2 = 41$
Donc : $AD = \sqrt{41}$ cm.

Exercice 3

1. **Calculons le volume de glace du cône :**

$\mathcal{V}_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$, donc :
$\mathcal{V}_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9$
$\mathcal{V}_{cone} = 16 \times 3 \times \pi$
$\mathcal{V}_{cone} = 48\pi$
D'où : le volume du cône est de 48π cm^3, soit environ 151 cm^3.

2. **Volume de la glace à la vanille :**

La glace à la vanille correspond à un cône dont la base est un disque de rayon $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ cm et de hauteur $9 \times \frac{2}{3} = 6$ cm. Donc :
$\mathcal{V}_{\text{vanille}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (\frac{8}{3})^2 \times 6 = \frac{128\pi}{9}$
D'où : Le volume de la glace à la vanille est de $\frac{128\pi}{9}$ m^3, soit environ 45 cm^3.

Volume de la glace au chocolat :
$\mathcal{V}_{\text{chocolat}} = \mathcal{V}_{\text{cone}} - \mathcal{V}_{\text{vanille}}$
$\mathcal{V}_{\text{chocolat}} = 48\pi - \frac{128\pi}{9}$
$\mathcal{V}_{\text{chocolat}} = \frac{432\pi}{9} - \frac{128\pi}{9}$
$\mathcal{V}_{\text{chocolat}} = \frac{304\pi}{9}$
Donc : le volume de la glace au chocolat est de $\frac{304\pi}{9}$ cm^3, soit environ 106 cm^3.

Déterminons par quelles fractions on multiplie le volume total de glace pour obtenir ces deux volumes :

On a : $\frac{\mathcal{V}_{\text{vanille}}}{\mathcal{V}} = \frac{\frac{128\pi}{9}}{48\pi} = \frac{128\pi}{9} \times \frac{1}{48\pi} = \frac{128}{9 \times 48} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

et $\frac{\mathcal{V}_{\text{chocolat}}}{\mathcal{V}} = \frac{\frac{304\pi}{9}}{48\pi} = \frac{304}{9 \times 48} = \frac{19}{27}$.

D'où : pour obtenir le volume de vanille, il faut muliplier le volume de glace par $\frac{8}{27}$ et pour obtenir le volume de chocolat il faut muliplier le volume total par $\frac{19}{27}$.

Exercice 4

Déterminons le volume exact du silo :
$\mathcal{V}_{\text{silo}} = \mathcal{V}_{\text{cylindre}} + \mathcal{V}_{\text{cone}}$
$\mathcal{V}_{\text{silo}} = \pi \times R^2 \times h + \frac{1}{3} \times \pi \times R^2 \times h$
$\mathcal{V}_{\text{silo}} = \pi \times 5^2 \times 30 + \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 10$
$\mathcal{V}_{\text{silo}} = 750\pi + \frac{250\pi}{3}$
$\mathcal{V}_{\text{silo}} = \frac{2\,250\pi}{3} + \frac{250\pi}{3}$
$\mathcal{V}_{\text{silo}} = \frac{2\,500\pi}{3}$
D'où : le volume du silo à céréales est de $\frac{2\,500\pi}{3}$ m^3, soit environ 2 618 m^3.

Exercice 5

1. **Calculons l'aire du triangle AKI :**

AKI est un triangle rectangle en A, donc :

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{AK} \times \text{AI}}{2} = \dfrac{\dfrac{\text{AD}}{2} \times \dfrac{\text{AB}}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{12}{2} \times \dfrac{12}{2}}{2} = \dfrac{6 \times 6}{3} = \dfrac{36}{2}$

D'où : l'aire du triangle AKI est de 18 cm^2.

2. **Calculons le volume de la pyramide AIKJ de base AKI :**

$\mathcal{V}_{\text{AIKJ}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire de la base.

$\mathcal{V}_{\text{AIKJ}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{AKI}} \times h$

$\mathcal{V}_{\text{AIKJ}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{AKI}} \times AJ$

$\mathcal{V}_{\text{AIKJ}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{AKI}} \times \dfrac{\text{AE}}{2}$

$\mathcal{V}_{\text{AIKJ}} = \dfrac{1}{3} \times 18 \times 6$

$\mathcal{V}_{\text{AIKJ}} = 36$

D'où : le volume de la pyramide AIKJ de base AKI est de 36 cm^3.

3. **Fraction du volume du cube représentant le volume de la pyramide AIKJ :**

$\dfrac{\mathcal{V}_{\text{AIKJ}}}{\mathcal{V}_{\text{cube}}} = \dfrac{36}{\text{AB}^3} = \dfrac{36}{12^3} = \dfrac{36}{1\,728} = \dfrac{36}{36 \times 48} = \dfrac{1}{48}$

D'où : le volume de la pyralide AIKJ représente les $\dfrac{1}{48}$ du volume du cube.

Exercice 6

Calculons le volume du jouet :

$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \mathcal{V}_{\text{demi-boule}} + \mathcal{V}_{\text{cone}}$

$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \dfrac{\dfrac{4}{3}\pi R^3}{2} + \dfrac{1}{3}\pi R^2 \times h$

$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \dfrac{4\pi R^3}{6} + \dfrac{1}{3}\pi R^2 \times h$

$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \dfrac{2\pi R^3}{3} + \dfrac{1}{3}\pi R^2 \times h$

$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \dfrac{2\pi \times 4^3}{3} + \dfrac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9$

$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \dfrac{128\pi}{3} + \dfrac{144\pi}{3}$

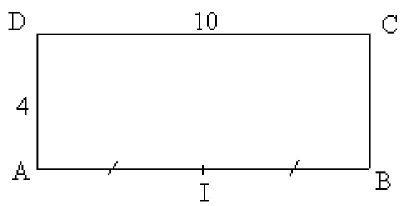
$\mathcal{V}_{\text{jouet}} = \dfrac{272\pi}{3}$

D'où : le volume du jouet est de $\dfrac{272\pi}{3}$ cm^3, soit eniron 285 cm^3.

Exercice 7

1. a) **Représentation en vraie grandeur de la face ABCD :**

ABCD est un rectangle de longueur AB = 10 cm et de largeur AD = 4 cm. I est le milieu du segment [AB].



1. b) **Calculons DI :**
Dans le triangle ADI rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :
$\mathrm{DI}^2 = \mathrm{DA}^2 + \mathrm{AI}^2$
$\mathrm{DI}^2 = 4^2 + 5^2$
$\mathrm{DI}^2 = 16 + 25$
$\mathrm{DI}^2 = 41$
Donc : $\mathrm{DI} = \sqrt{41}$ cm.

2. a) **Aire du triangle DIC :**
$\mathcal{A}_{\mathrm{DIC}} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{\mathrm{DC} \times \mathrm{AD}}{2} = \dfrac{10 \times 4}{2}$
D'où : l'aire du triangle DIC est de 20 cm^2.

2. b) **Calculons le volume de la pyramide HDIC :**
$\mathcal{V}_{\mathrm{HDIC}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire de la base de la pyramide
$\mathcal{V}_{\mathrm{HDIC}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\mathrm{DIC}} \times \mathrm{DH}$
$\mathcal{V}_{\mathrm{HDIC}} = \dfrac{1}{3} \times 20 \times 4$
$\mathcal{V}_{\mathrm{HDIC}} = \dfrac{80}{3}$
Donc : le volume de la pyramide HDIC est de $\dfrac{80}{3}$ cm^3, soit environ 27 cm^3.