Cours : équations

1 Equations du premier degré à une inconnue

a) Définitions :

Une équation est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu.
On désigne en général ce nombre inconnu par une lettre, et on l'appelle l'**inconnue**.
Une valeur de ce nombre pour laquelle l'égalité est vraie est une **solution** de l'équation.

Exemple :
$3 - 4x = 6(2 - x)$ est une équation d'inconnue x.
Pour cette équation, le plus grand exposant de l'inconnue x est 1 ; cette équation est de degré 1.

Résoudre une équation d'inconnue x revient à trouver toutes les valeurs possibles du nombre x (si elles existent) qui vérifient l'égalité.
Chacune de ces valeurs est une **solution de l'équation**.

b) Propriétés des égalités

On ne change pas une égalité lorsqu'on **ajoute** ou **soustrait** un même nombre à chacun de ses membres.
a, b, c désignant des nombres relatifs.
Si $a = b$ alors $a + c = b + c$
Si $a = b$ alors $a - c = b - c$

On ne change pas une égalité lorsqu'on **multiplie** ou **divise** par un même nombre non nul à chacun de ses membres.
a, b, c désignant des nombres relatifs avec $c \neq 0$.
Si $a = b$ alors $ac = bc$
Si $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

c) Résolution d'une équation du premier degré

Résoudre l'équation $3 - 4x = 6(2 - x)$

$3 - 4x = 12 - 6x$ On développe $6(2 - x)$.

$3 - 4x + 6x = 12 - 6x + 6x$ On ajoute $6x$ à chaque membre de l'équation.

$3 + 2x = 12$ On réduit chaque membre de l'équation.

$3 + 2x - 3 = 12 - 3$ On retranche 3 à chaque membre de l'équation.

$2x = 9$ On réduit chaque membre de l'équation.

$\frac{2x}{2} = \frac{9}{2}$ On divise par 2 chaque membre de l'équation.

$x = \frac{9}{2}$

La solution de l'équation est donc $\frac{9}{2}$.

2 Résolutions de problèmes :

Principe sur un exemple :

Deux frères, Marc et jean, possèdent chacun un jardin.
L'aire du jardin de Marc est les 3/4 de l'aire du jardin de Jean.
Les deux frères possèdent en tout 1 470 m^2.
Quelles sont les aires des jardins de Marc et de Jean ?

Résolution du problème en 5 étapes :

1) Choix de l'inconnue :
En général on choisit comme inconnue ce qui est demandé dans la question (ou l'une des choses qui sont demandées dans la question)

2) On exprime les autres inconnues en fonction de x

3) On met le problème en équation

4) On résout l'équation

5)On répond à la question et on vérifie son résultat.

1) Soit x l'aire du jardin de Jean

2) aire du jardin de Marc : $\frac{3}{4}x$

3) $x + \frac{3}{4}x = 1470$

4) $\left(1 + \frac{3}{4}\right)x = 1470$

$\left(\frac{4}{4} + \frac{3}{4}\right)x = 1470$

$$\frac{7}{4}x = 1470$$

$$\frac{\frac{7}{4}x}{\frac{7}{4}} = \frac{1470}{\frac{7}{4}}$$

$$x = 1470 \times \frac{4}{7} = 840$$

5) L'aire du jardin de Jean est de 840 m^2.
L'aire du jardin de Marc est de $3/4 \times 840 = 630$ m^2

Vérification : 840 + 630=1470

3 Equations - produits

Propriété : un produit est nul si au moins un de ses facteurs est nul.
Quels que soient les nombres a et b, si ab = 0 alors a = 0 ou b =0.

Exemple :

$(x + 6)(3x - 4) = 0$

soit $x + 6 = 0$ soit $3x - 4 = 0$
$x = -6$ ou $3x = 4$
$x = -6$ ou $x = \frac{4}{3}$

L'équation a deux solutions -6 et $\frac{4}{3}$.

4 Equations du type $x^2 = a$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 = 5$
$x^2 - 5 = 0$
$x^2 - \sqrt{5}^2 = 0$
$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$
Les solutions sont $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$

Cours : équations

Dans le cas général :

- **Si $a > 0$: l'équation $x^2 = a$ possède 2 solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$**
- **Si $a = 0$: l'équation $x^2 = a$ possède 1 solution : 0**
- **Si $a < 0$: l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution**

Remarque :

Quand $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.

Exemples :

- L'équation $x^2 = 7$ a deux solutions : $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$
- L'équation $x^2 = 0$ a une solution : 0
- L'équation $x^2 = -7$ n'a pas de solution.