CHAPITRE 5

COURS : ECRITURES LITTÉRALES ; IDENTITÉS REMARQUABLES

Extrait du programme de la classe de Troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$ Connaître les égalités : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2=(100+1)^2=100^2+200+1$; $(x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2=(x+5+2)(x+5-2)$	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

1 Développer un produit

Définition : **Développer** un produit signifie le transformer en une **somme algébrique**

*Rappel : une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions, impliquant des nombres et/ou des lettres*

Nous avons, pour réaliser cela, plusieurs moyens à disposition :

1.1 Distributivité simple

Produit	$\rightarrow$	Somme algébrique
$k(a+b)$	$\rightarrow$	$ka+kb$
$k(a-b)$	$\rightarrow$	$ka-kb$

Applications et exemples :

– **Calcul mental :**

► $13\times 99 = 13\times(100-1) = 13\times 100 - 13\times 1 = 1300-13 = 1287$

► $25\times 104 = 25\times(100+4) = 25\times 100+25\times 4 = 2500+100 = 2600$

– **Développement d'une expression littérale :**

► $3(5a+7) = 3\times 5a+3\times 7 = 15a+21$

► $-2(5-4x) = -2\times 5-(-2)\times 4x = -10+8x$

1.2 Distributivité double

Produit	→	Somme algébrique
$(a+b)(c+d)$	→	$ac+ad+bc+bd$

Applications et exemples :
Développement d'une expression littérale :

► $(3-a)(4a+2) = 3\times 4a + 3\times 2 - a\times 4a - a\times 2 = 12a+6-4a^2-2a = -4a^2+10a+6$

► $(3x-2)(1-4x) = 3x\times 1 + 3x\times(-4x) - 2\times 1 - 2\times(-4x) = 3x-12x^2-2+8x = -12x^2+11x-2$

⚠ : **Pour ne pas se tromper dans les signes**, il est utile de se souvenir que, par exemple, $3x-2$ est la somme de $3x$ et de -2, et que $1-4x$ est la somme de 1 et de $-4x$. Ainsi, pour le calcul précédent, on a :

$(3x-2)(1-4x) = (3x+(-2))(1+(-4x)) = (3x)\times 1 + (3x)\times(-4x) + (-2)\times 1 + (-2)\times(-4x) = \dots$ ►

1.3 Identités remarquables

Produit	→	Somme algébrique
Carré d'une somme		
$(a+b)^2$	→	$a^2+2ab+b^2$
Carré d'une différence		
$(a-b)^2$	→	$a^2-2ab+b^2$
Produit d'une somme par une différence		
$(a-b)(a+b)$	→	a^2-b^2

Applications et exemples :

– **Calcul mental :**

► $101^2 = (100+1)^2 = 100^2+2\times 100+1^2 = 10000+200+1 = 10201$

► $19^2 = (20-1)^2 = 20^2-2\times 20+1^2 = 400-40+1 = 361$

► $39\times 41 = (40-1)(40+1) = 40^2-1^2 = 1600-1 = 1599$

– **Développement d'une expression littérale :**

► $(y+7)^2 = y^2+2\times y\times 7+7^2 = y^2+14y+49$

► $(1-3x)^2 = 1^2-2\times 1\times 3x+(3x)^2 = 1-6x+9x^2$

► $(20-8x)(20+8x) = 20^2-(8x)^2 = 400-64x^2$

2 Factoriser une somme algébrique

Définition : **Factoriser** une somme algébrique signifie la transformer en **produit**

En fait, pour résumer : **Produit** —Développer→ **Somme algébrique** ; **Somme algébrique** —Factoriser→ **Produit**

2.1 Avec un facteur commun

On utilise la propriété de simple distributivité, mais "à l'envers" :

Somme algébrique	$\rightarrow$	Produit
$\underline{k}a+\underline{k}b$	$\rightarrow$	$\underline{k}(a+b)$
$\underline{k}a-\underline{k}b$	$\rightarrow$	$\underline{k}(a-b)$

Dans les sommes algébriques de gauche, il y a deux termes, chacun étant un produit de deux facteurs. Comme k se retrouve dans les deux termes, on dit que c'est un **facteur commun** aux deux termes. On dit également que l'on a "**mis *k* en facteur**".

Applications et exemples :

- **Calcul mental :**
  - ► $13\times 62+13\times 38 = 13\times(62+38) = 13\times 100 = 1300$
  - ► $18.1\times 34.8-8.1\times 34.8 = (18.1-8.1)\times 34.8 = 10\times 34.8 = 348$
- **Factorisation d'une expression littérale grâce à un facteur commun :**
  - ► $4a^2+3a = 4\times a\times a+3\times a = a(4a+3)$
  - ► $(x+7)(5-4x)-2(5-4x) = (5-4x)\times(x+7-2) = (5-4x)(x+5)$
  - ► $(x+3)^2-5(x+3) = (x+3)\times(x+3-5) = (x+3)(x-2)$

2.2 Avec les identités remarquables

Là aussi, on utilise les identités remarquables vues au paragraphe 1.3, mais "dans l'autre sens" :

Somme algébrique	$\rightarrow$	Produit
$a^2+2ab+b^2$	$\rightarrow$	$(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2$	$\rightarrow$	$(a-b)^2$
a^2-b^2	$\rightarrow$	$(a-b)(a+b)$

Applications à la factorisation d'expressions littérales :

► $y^2+4y+4 = y^2 + 2\times y\times 2 + 2^2 = (y+2)^2$

► $9x^2-6x+1 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2 = (3x-1)^2$

► $(x+5)^2-9 = (x+5)^2-3^2 = [(x+5)-3]\times[(x+5)+3] = (x+2)\times(x+8)$